平成20年度 信号処理工学・期末試験問題

2月4日(水) 8:30〜10:00 於 241 号室

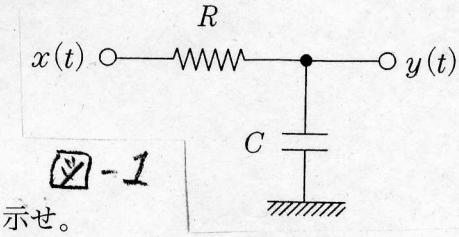


図-1

第1問　離散時間回路の構成

図1に示すRC低域通過フィルタを離散時間回路で構成したい。

1-1 この連続時間回路（アナログ回路）の伝達関数のラプラス変換 $H_a(s)$ を示せ。

1-2 標準 Z 変換（インパルス応答が変わらないように行なう $s \to z$ 変換）を用いて $H_d(z)$ を表せ。$H_d(z)$ を具体的に求められない場合でも，どのようにして求めるべきなのか，を記述すれば部分点を与える。

1-3 $H_d(z)$ を離散時間フィルタ（デジタルフィルタ）として構成せよ。即ち，加算器，乗算器，遅延器を用いて，$H_d(z)$ を構成せよ。

第2問 フィルタの位相特性

2-1 群遅延とは何か。その定義式を示すとともに，物理的意味について知るところを述べよ。

2-2 直線位相（線形位相）フィルタの出力信号は，1) 入力信号に対してどのような性質を持つことになるのか，また，2) 何故，そうなるのか，について知るところを述べよ。

2-3 FIR フィルタ「$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + h(4)z^{-4}$」が直線位相フィルタとなるための必要十分条件を述べよ。但し $h(k)$ は全て実数である。

第3問 信号推定フィルタ

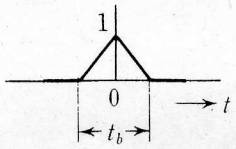
3-1 入力信号 $x(n)$ に対するFIRフィルタを考える。即ち，時不変の実係数 $h(k)$ に対して，$y(n) = \sum_{k=0}^{K} h(k)x(n-k)$ で計算される $y(n)$ を考える。さて，この $y(n)$ が $x(n+1)$ を近似するように，係数 $h(k)$ を設定したい。この時 $h(k)$ が満たすべき方程式を導出せよ。結果だけ示している場合の部分点は低いので注意せよ。

第4問 短時間フーリエ変換

4-1 図2に示す信号（振幅一定で周波数が連続して変化する信号）に対して，窓長 d の三角窓を用いて短時間フーリエ変換を行なった。窓を時間軸上で移動しながら時刻 t における振幅スペクトルを図示したものが図3である（白：スペクトルの振幅大，黒：振幅小）。左から $d = 2.5$, $d = 0.25$, $d = 0.025$ [sec] となっている。窓長によって結果の見え方が変化する理由を，下記の用語と図を用いて，解説せよ。

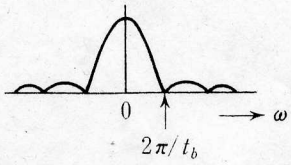
「窓関数のスペクトル」「時間領域の乗算」「周波数領域の畳み込み」「時間分解能」「周波数分解能」「不確定性」

単一三角パルス



フーリエ変換 →

$$\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega t_b}{2}\right)}{t_b\omega^2}$$



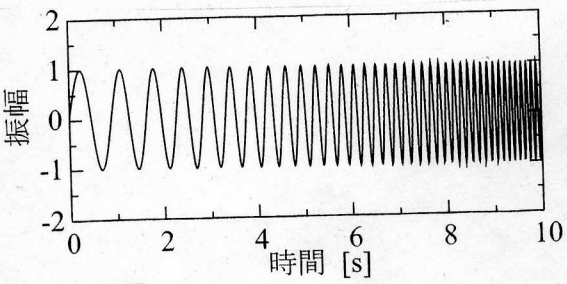


図-2

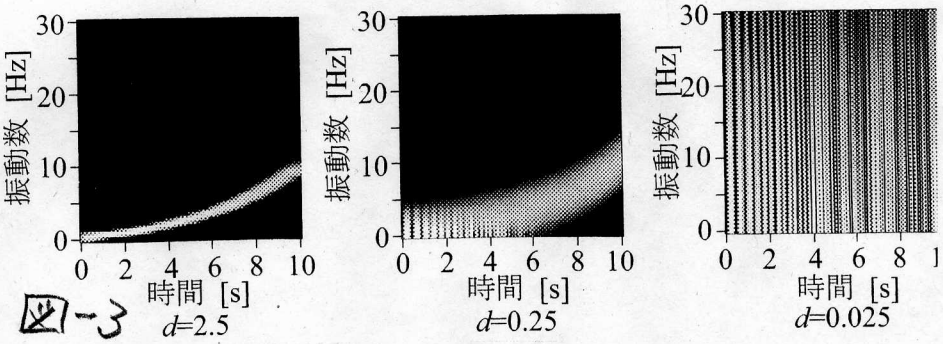


図-3

平成20年度　信号処理工学期末試験解答

文責　　甲斐 常伸

第1問

1-1　回路に流れる電流を $i(t)$ とすると

$$\begin{cases} y(t) = x(t) - i(t)R \\ y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

これより

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \frac{x(t)-y(t)}{R}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{CR}\int \{x(t)-y(t)\}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

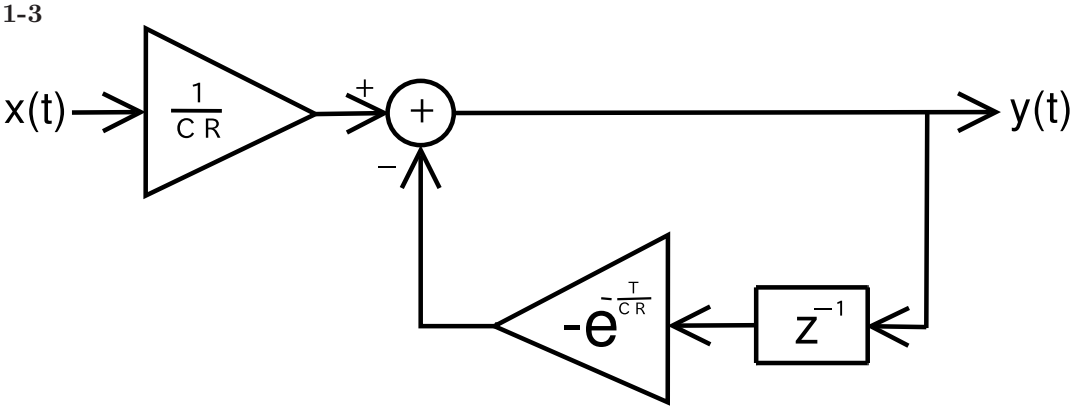
両辺をラプラス変換すれば

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{sCR}\{X(s)-Y(s)\} \\ (sCR+1)Y(s) &= X(s) \\ \text{よって}\quad H_a(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{sCR+1} \end{aligned}$$

1-2　$H_a(s) = \dfrac{1}{sCR+1} = \dfrac{1}{CR}\cdot\dfrac{1}{s+\frac{1}{CR}}$

これを標準 z 変換すれば $H_d(z) = \dfrac{1}{CR}\cdot\dfrac{1}{1-z^{-1}e^{-\frac{T}{CR}}}$

1-3



第2問

2-1　定義式は $dg(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\angle H(z)}{\mathrm{d}\omega}$

物理的な意味は角周波数 ω 付近の信号成分がシステムを通過するときに受ける遅れ時間

2-2　線形位相システムとは

1) 入力信号での波形が出力でも歪まない性質がある。

2) 位相が線形なので、その位相は $\angle H(\omega) = -t_0\omega$ と書くことができる。これより、$dg(\omega) = t_0$ となるので、すべての周波数の成分が等しく t_0 だけ遅れを受ける事が分かる。それはすなわち、入出力間で波形が歪まないことを意味している。

2-3　$h(k)$ はすべて実数であることは分かっているので、あと必要な条件は
・$h(n)$ がある n_0 に対して対称 or 反対称に分布している
が必要十分条件である。これをもっと具体的に数式で書けば、
・$h(0)=h(4), h(1)=h(3)$ or $h(0)=-h(4), h(1)=-h(3), h(2)=0$
と書く事もできる。また、図形的な意味でいえば
・$H(z)$ の零点を z_m とすれば z_m^{-1} も $H(z)$ の零点になっている
と書くこともできる。上の 3 つの条件はすべて同じ意味である。

第 3 問

3-1　信号推定フィルタにおいて $d(n)=x(n+1), v(n)=0$, 推定出力 $y(n)$ として、Winner-Hopf 方程式を導けばよいことになる。ノートとは n と k が逆だったりしますが、やってることは同じです。

$y(n)=\sum_{k=0}^{K} h(k)x(n-k)$ より

$$e(n)=d(n)-y(n)=x(n+1)-\sum_{k=0}^{K} h(k)x(n-k)$$

いま、誤差を評価する関数を $E_n[e^2(n)]$ とすれば、$J=E_n[e^2(n)]$ を最小にする $h(k)$ をみつけたい。
そのためには、

$$\frac{\partial J}{\partial h(l)}=0 \qquad (l=0,1,2,\cdot,K-1)$$

を満たす $h(k)$ を見つければよい。

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial h(l)} &= \frac{\partial}{\partial h(l)} E_n\left[\left\{x(n+1)-\sum_{k=0}^{K} h(k)x(n-k)\right\}^2\right] \\ &= E_n\left[2\left\{x(n+1)-\sum_{k=0}^{K} h(k)x(n-k)\right\}\{-x(n-l)\}\right] \\ &= 2\sum_{k=0}^{K} h(k)E_n[x(n-k)x(n-l)]-2E_n[x(n+1)x(n-l)]=0\end{aligned}$$

これより　$\sum_{k=0} h(k)E_n[x(n-k)x(n-l)]=E_n[x(n+1)x(n-l)]$　という関係が得られる。ここで

$$\varphi_{xx}(k-l)=E_n[x(n-k)x(n-l)] \qquad : \varphi_{xx}\text{は } x(n) \text{ の自己相関関数}$$

とすれば

$$E_n[x(n+1)x(n-l)]=\varphi_{xx}(-1-l)=\varphi_{xx}(l+1) \text{ となる}$$

これを用いれば、先の関係は

$$\sum_{k=0}^{K} h(k)\varphi_{xx}(k-l)=\varphi_{xx}(l+1) \qquad l=0,1,2,\cdots,K-1$$

となり、これが $h(k)$ の満たすべき方程式である。行列で書けば下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \varphi_{xx}(0) & \varphi_{xx}(1) & \varphi_{xx}(2) & \cdots & \varphi_{xx}(K-1) \\ \varphi_{xx}(1) & \varphi_{xx}(0) & \varphi_{xx}(1) & \cdots & \varphi_{xx}(K-2) \\ \varphi_{xx}(2) & \varphi_{xx}(1) & \varphi_{xx}(0) & \cdots & \varphi_{xx}(K-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{xx}(K-1) & \varphi_{xx}(K-2) & \varphi_{xx}(K-3) & \cdots & \varphi_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(K-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{xx}(1) \\ \varphi_{xx}(2) \\ \varphi_{xx}(3) \\ \vdots \\ \varphi_{xx}(0) \end{pmatrix}$$

第 4 問

4-1　短時間フーリエ変換は信号と窓関数の「時間領域の乗算」をするがこれは「周波数領域のスペクトルの畳み込み」をしていることに他ならない。この畳み込みによって信号のスペクトルは窓関数のスペクトルの広がり分、もれが出てきてしまう。三角窓のフーリエ変換を見てみると、窓長と周波数スペクトルの広がりは反比例している。窓長を狭くして「時間分解能」を向上させようとするとスペクトルの広がりが大きくなり、「周波数分解能」が低下する。逆にスペクトルの広がりを狭くして「周波数分解能」を向上させれば、窓長が広がり「時間分解能」が低下してしまう。という「不確定性」があるため、窓長によって時間分解能やスペクトルのもれの違いが振幅スペクトルの図にあらわれてくる。