平成 20 年度　信号処理工学・中間試験問題の解答

文責　　甲斐 常伸

過去問に解説がついてるのでそんないらないかと思いますが、一応作っておきます。図は面倒くさいので手書きをまとめて後ろに載せておきます。ついでに解説に書いてあった教科書 p.30 辺りを載せておくので参考にしてください。1-1,2-1,3-1 あたりは今年ももう 1 回出てきてもおかしくないと思うので丸暗記でしょう。

1-1

・連続周期信号は離散非周期スペクトルになる (図 1)
・連続非周期信号は連続非周期スペクトルになる (図 2)
・離散非周期信号は連続周期スペクトルを持つ (図 3)
・離散周期信号は離散周期スペクトルを持つ (図 4)

1-2

時間領域 ↔ 周波数領域の変換の方向によらず連続 ↔ 非周期、離散 ↔ 周期の対応がある

2-1

1) フーリエ変換　$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

逆変換　$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$

2) フーリエ級数　$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\mathrm{d}t$

フーリエ級数展開　$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$

3) 離散フーリエ変換　$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1) \qquad (W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}})$

逆変換　$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \quad (n = 0, 1, \cdots, N-1)$

2-2

$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$ より

$$
\begin{aligned}
X(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(N-k)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{-kn}W_N^{Nn} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{-kn} \qquad (W_N^N = 1 \text{ より}) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(W_N^{kn}\right)^* = X^*(k)
\end{aligned}
$$

2-3

1) 直線畳み込み　　$y(n) = \{1, -2, -1, 2, -2, -1, 2\}$

2) 循環畳み込み　　$y(n) = \{-1, -3, 0, 2, -1, -3, 0, 2\}$　の繰り返し

詳しくは過去問付属の解説をどうぞ

3-1

z 変換の定義式　　$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$　　($z^{-1} = e^{-sT}, T$ は標本化周期)

3-2

1)z 変換の定義式に従えば

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{K} a(k) x(n-k) \right) z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{K} a(k) \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k) z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{K} a(k) \sum_{l=-k}^{\infty} x(l) z^{-(l+k)} \qquad (n-k=l \quad \text{の置き換え}) \\
&= \sum_{k=0}^{K} a(k) z^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} x(l) z^{-l} = A(z) X(z)
\end{aligned}
$$

注) 定義に従ってやってみましたが先生に聞くと、定義からではなく $x(n) \to X(z)$ なら $x(n-k) \to X(z) z^{-k}$ という z 変換のツールとしての使い方をよく分かってほしいとのことです。

2)　1) と同様の議論で、

$$
Y(z) = \frac{A(z)}{1 + B(z)} X(z) \qquad \text{ただし } A(z) = \sum_{k=0}^{K} a(k) z^{-k},\ B(z) = \sum_{l=1}^{L} b(l) z^{-l}
$$

3)　図 5、図 6

3-3

1) 連続系の伝達関数 $H(s)$ の安定条件は、その極が左半面内にあることである。すなわち $s = \alpha + j\omega$ とすれば $\alpha < 0$ ということである。$z = e^{sT}$ より、$z = e^{\alpha T} e^{j\omega T}$ であることを考えれば $\alpha < 0 \Longleftrightarrow |z| < 1$ である。したがって、$H(z)$ はその極が単位円の内側にあれば安定であることが分かる。

2)　$y(n) = 2r\cos\theta y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n)$　　より

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= 2r\cos\theta\ Y(z) z^{-1} - r^2 Y(z) z^{-2} + X(z) \\
Y(z) &= \frac{1}{z^2 - 2r\cos\theta z + r^2} X(z)
\end{aligned}
$$

したがって、$H(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2r\cos\theta z + r^2}$ である。その極は

$$
\begin{aligned}
& z^2 - 2r\cos\theta z + r^2 = 0 \\
& (z - re^{j\theta})(z - r^{-j\theta}) = 0 \\
& z = re^{\pm j\theta}
\end{aligned}
$$

これが単位円内にあればいいので

$$
|re^{\pm j\theta}| = |r| < 1
$$

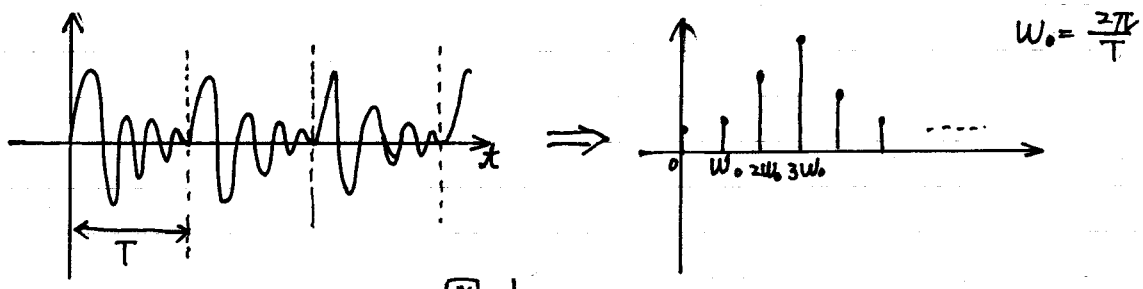

図 1

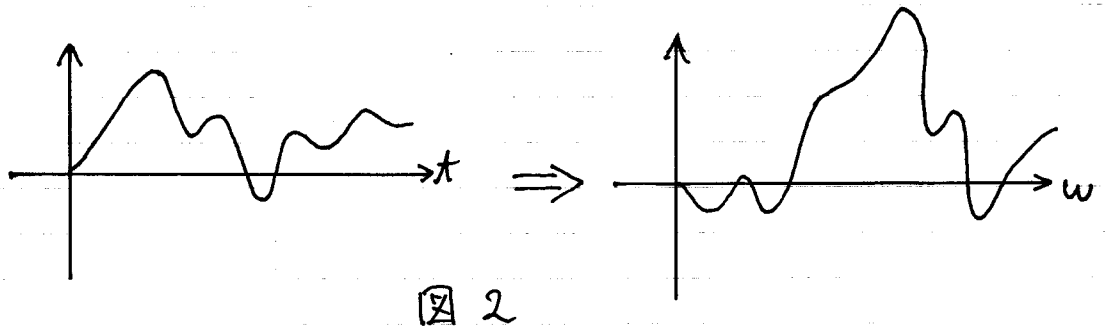

図 2

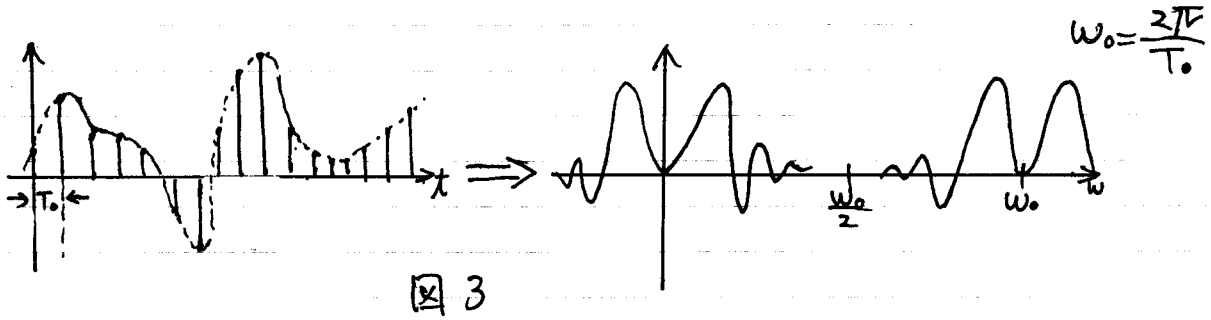

図 3

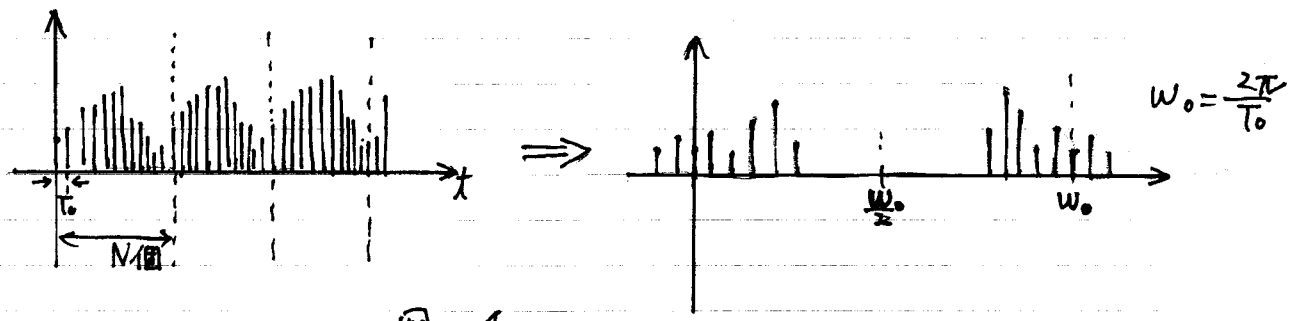

図 4

KOKUYO LOOSE LEAF

No. Date

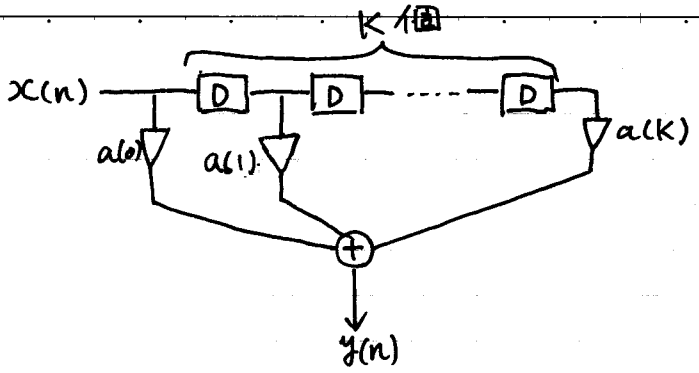

図 5

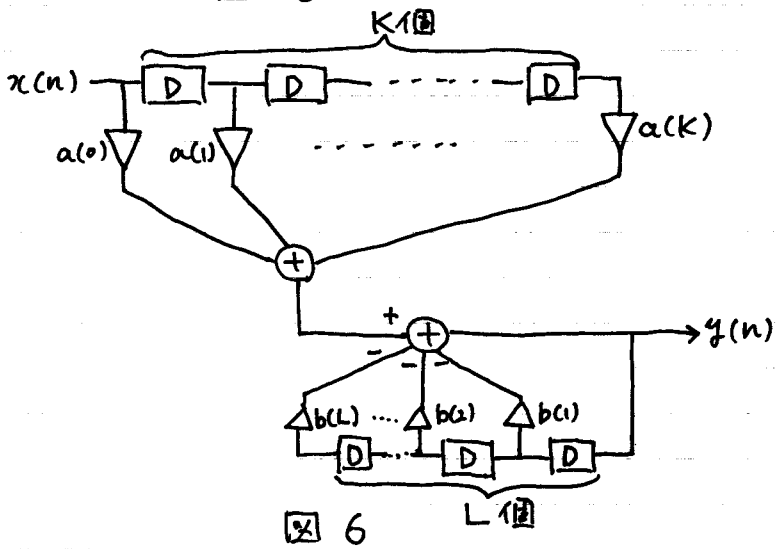

図 6